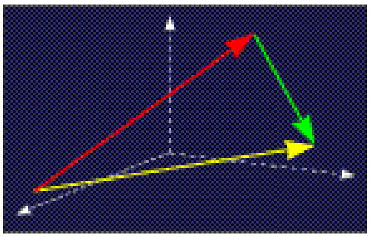
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Grundsätzliches zu Termen und Variablen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum wird dargelegt, warum in der Mathematik so viel „mit Buchstaben gerechnet“ wird, was Variable, Terme, Identitäten und Formeln sind, wie einfache Termumformungen (vor allem im Hinblick auf das Rechnen mit Klammern) durchgeführt werden und wie wir Terme richtig „anschauen“, um ihre Struktur zu erfassen.

1 Wieso Buchstaben?

Mathematik hat – natürlich – etwas mit „Rechnen“ zu tun. Aber schon ein Blick in ein fortgeschrittenes Mathematikbuch zeigt, dass dort weniger mit Zahlen als mit Buchstaben „gerechnet“ wird. Was soll das sein – „mit Buchstaben rechnen“? Doch der Eindruck täuscht: In weiten Teilen des Mathematikstoffs geht es um das Rechnen mit *Zahlen* – nur sieht man das auf den ersten Blick nicht! Und das kommt so:

Sobald das Interesse über das Hantieren mit einzelnen Zahlen hinausgeht, stellen sich Fragen allgemeinerer Natur ein. Wie sind eigentlich die **Rechenregeln** beschaffen, die wir – mehr oder weniger automatisch – anwenden, um mit Zahlen umzugehen? Eine der einfachsten Regeln ist diese: Beim Addieren von reellen Zahlen (und daher auch von natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen) kommt es auf die Reihenfolge nicht an. So ist zum Beispiel

$$2 + 3 = 3 + 2, \tag{1.1}$$

und es ist auch $3 + 7 = 7 + 3$ und $1.3 + 17 = 17 + 1.3$ und $\sqrt{2} + 1 = 1 + \sqrt{2}$, und wir können viele Beispiele für diese Regel angeben. Kurz und bündig ausgedrückt: Sind x und y reelle Zahlen, so gilt

$$x + y = y + x. \tag{1.2}$$

Hier haben wir schon eine Aussage, die *von Zahlen handelt, aber in der nur Buchstaben vorkommen* – ein Beispiel für „Buchstabenrechnen“. Sie heißt **Kommutativgesetz der Addition**.

Ebenso gilt das **Kommutativgesetz der Multiplikation**: Sind x und y reelle Zahlen, so gilt

$$x\,y = y\,x. \tag{1.3}$$

Eine weitere Aussage dieses Typs, welche die Multiplikation mit der Addition kombiniert, ist

$$a\,(b + c) = a\,b + a\,c. \tag{1.4}$$

Sie gilt für alle reellen Zahlen a, b und c und heißt **Distributivgesetz** oder „**Klammern ausmultiplizieren**" („**Klammern auflösen**"). Zur Illustration setzen wir anstelle von a, b und c konkrete Zahlen ein. Werten wir die linke und die rechte Seite von (1.4) für $a = 2$, $b = 3$ und $c = 4$ getrennt aus:

$$\begin{array}{ll} \text{linke Seite von (1.4):} & 2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14 \\ \text{rechte Seite von (1.4):} & 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14. \end{array} \tag{1.5}$$

Wir sehen, dass sich beide Seiten auf dieselbe Zahl reduzieren, nämlich 14, haben die Aussage (1.4) also durch das Einsetzen konkreter Zahlen überprüft. Auch für jede andere konkrete Wahl der drei Zahlen a, b und c ist (1.4) eine wahre Aussage. Es handelt sich offenbar um eine *allgemeine Eigenschaft der reeller Zahlen* – eine Rechenregel.

Eine weitere Rechenregel, die im Umgang mit negativen Zahlen nützlich ist, lautet

$$-\,(-u) = u, \tag{1.6}$$

wenn u eine reelle Zahl ist. Damit verwandte Regeln sind $(-a)(-b) = a\,b$, $(-1)z = -z$ und $(-x)y = -x\,y$, die ebenfalls für beliebige reelle Zahlen gelten.

2 Identitäten

Aussagen, in denen Symbole vorkommen, und die stets richtig sind, wenn diese Symbole durch konkrete Zahlen ersetzt werden, nennen wir **Identitäten**. Beispiele für (sehr grundlegende) Identitäten sind die oben angegebenen Rechenregeln. Eine etwas komplexere Identität ist die Aussage

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4\,a\,b. \tag{2.1}$$

Setzen Sie konkrete Zahlen Ihrer Wahl ein und überprüfen Sie sie!

3 Formeln

Die Formulierung von Rechenregeln (Identitäten) ist *einer* der Gründe für die Verwendung von Buchstaben (Symbolen) in der Mathematik. Ein anderer besteht darin, kurze und kompakte **Berechnungsvorschriften** auszudrücken. Ein Beispiel, gleich mit Symbolen formuliert: Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit Seitenlängen a, b und c kann so berechnet werden[1]:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{wobei} \quad s = \frac{1}{2}(a + b + c) \quad \text{(halber Umfang).} \tag{3.1}$$

[1] Das ist die so genannte *Heronsche Flächenformel*, benannt nach Heron von Alexandria, der die Berechnungsvorschrift, die durch sie ausgedrückt wird, im 1. Jahrhundert unserer Zeitrechnung fand.

Versuchen Sie, die Vorschrift „Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks, wenn seine Seitenlängen bekannt sind" in Worten auszudrücken, ohne Symbole aufzuschreiben! Erkennen Sie den Vorteil einer knappen **Formel** wie (3.1)?

Eine Formel drückt eine Größe durch eine oder mehrere andere Größen aus. Formeln können auch kombiniert werden. Haben wir beispielsweise einen Zylinder mit Radius r und Höhe h vor uns, so ist seine Mantelfläche durch $M = 2\,\pi\,r\,h$, seine Grundfläche durch $D_1 = \pi\,r^2$, der Flächeninhalt des „Deckels" durch $D_2 = D_1$ und seine gesamte Oberfläche durch $A = M + D_1 + D_2$ gegeben. Die Formel für A kann zu $A = M + 2\,D_1$ vereinfacht oder in der Form

$$A = 2\,\pi\,r\,h + 2\,\pi\,r^2 \tag{3.2}$$

durch r und h ausgedrückt werden. Mit Hilfe des Distributivgesetzes (1.4), nun von rechts nach links gelesen, kann die weitere Vereinfachung

$$A = 2\,\pi\,r\,(h + r) \tag{3.3}$$

erzielt werden[2]. Formeln stellen immer auch *Benennungen* von Größen dar. Wird für irgendeinen Zweck das Quadrat der Oberfläche eines Zylinders benötigt, so kann es – sofern die Bezeichnung von A für die Oberfläche einmal vereinbart wurde – einfach in der Form A^2 angeschrieben werden, wobei anstelle von A jederzeit einer der oben für A angegebenen Terme, also $M + D_1 + D_2$ oder $M + 2\,D_1$ oder $2\,\pi\,r\,h + 2\,\pi\,r^2$ oder $2\,\pi\,r\,(h + r)$, eingesetzt werden kann.

4 Terme und Variable

Hat die Idee von Rechenregeln und Formeln, die durch Symbole ausgedrückt werden, die Mathematik einmal erfasst, so führen das Verlangen nach tieferem Verstehen und das Interesse an Anwendungen unweigerlich zu größerer Komplexität und zu anspruchsvolleren Aufgabenstellungen. So möchte man zum Beispiel eine Identität wie (2.1) *beweisen*, d.h. nicht nur für einzelne Zahlen überprüfen, sondern sicherstellen, dass sie *immer* gilt – wir werden das etwas weiter unten in diesem Skriptum noch machen. Mit „Buchstaben-Ausdrücken" umgehen zu können, gehört zum Handwerkszeug in allen Fächern, in denen Mathematik eine Rolle spielt.

Das korrekte mathematische Wort für einen „Buchstaben-Ausdruck" ist **Term**. Ein Beispiel für einen Term ist

$$(a + b)^2 - (a - b)^2. \tag{4.1}$$

Wir haben ihn bereits weiter oben angeschrieben: Er steht auf der linken Seite von (2.1). Die abstrakten Symbole a und b stehen für konkrete Zahlen, auf die man sich zwar nicht festlegen möchte, die aber jederzeit in den Term eingesetzt werden können. In diesem Sinn sind sie **Platzhalter** für Zahlen. Da sie nicht mit konkreten Zahlenwerten belegt sind, sind sie „variabel" und heißen daher **Variable**.

Die oben angeschriebene Formel (3.1) gibt den Flächeninhalt eines Dreiecks durch einen Term an. In ihr treten zwei verschiedene Variablentypen auf: Die Seitenlängen a, b und c können

[2] Wir sagen, dass hier $2\,\pi\,r$ „herausgehoben" wurde.

vorgegeben werden (sie heißen *unabhängige Variable*), der Flächeninhalt F wird dann aus ihnen bestimmt (und da er von der Wahl der Seitenlängen abhängt, ist er eine *abhängige Variable*).

Manchmal können unabhängige Variable nicht wirklich *völlig* frei gewählt werden. So steht etwa die Variable z im Term

$$\frac{3z^2+2}{z} \tag{4.2}$$

nicht für beliebige reelle Zahlen, sondern nur für reelle Zahlen, die von 0 verschieden sind. Der Wert $z = 0$ ist „verboten", denn würde man ihn in (4.2) einsetzen, so müsste man durch 0 dividieren, was keinen Sinn macht. Abgesehen davon kann z aber frei gewählt werden.[3]

Der Begriff des Terms (ebenso wie der des „Ausdrucks") ist ein bisschen unscharf, aber er leistet gute Dienste. Die Terme, mit denen man es am Anfang der „Termrechnung" zu tun hat, haben im Grunde eine einfache Struktur: Werden die in ihnen vorkommenden Symbole durch Zahlen ersetzt, so können sie unter Verwendung der Grundrechnungsarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) und der zusätzlichen Operation des Wurzelziehens berechnet werden. Nach und nach treten dann weitere Elemente (wie Winkelfunktionen, Exponentialfunktionen und Logarithmen) hinzu.

Ausgehend von den Begriffen Variable und Term können zahlreiche interessante, auch für Anwendungen wichtige mathematische Sachverhalte formuliert und neue Erkenntnisse gewonnen werden. Dazu ist es notwendig, **Terme** unter Ausnutzung der grundlegenden Rechengesetze **umzuformen**, beispielsweise zu vereinfachen oder so „herzurichten", dass man ihnen bestimmte Dinge leicht ansieht.

5 Terme umformen

Wie das Beispiel (2.1) zeigt, können zwei Terme, die verschieden aussehen und verschieden aufgebaut sind, auf den gleichen Zahlenwert führen, wenn für die in ihnen vorkommenden Symbole Zahlen eingesetzt werden. Das ist genau, was eine Identität ausdrückt. Die Identität (2.1) sagt uns, dass die Terme $(a+b)^2-(a-b)^2$ und $4\,a\,b$ im Grunde dieselbe Sache darstellen – man kann sie als **äquivalent** bezeichnen. Sie haben zwar eine unterschiedliche Struktur, nämlich

- $(a+b)^2-(a-b)^2$ ist die Differenz zweier Terme, von denen der erste das Quadrat einer Summe und der zweite das Quadrat einer Differenz ist,
- $4\,a\,b$ ist ein Produkt aus drei Faktoren,

und sind daher nicht im strikten Sinn *gleich*, aber in der Aussage[4]

$$(a+b)^2-(a-b)^2 = 4\,a\,b \qquad \forall\, a,b\in\mathbb{R} \tag{5.1}$$

[3] Ein weiteres Beispiel: In (3.1) dürfen nicht wirklich *beliebige* Zahlenwerte für die Variablen a, b und c eingesetzt werden – es muss auch tatsächlich ein Dreieck mit diesen Seitenlängen existieren. Beispielsweise gibt es kein Dreieck mit Seitenlängen $a = b = 1$ und $c = 3$. Setzen wir diese Werte dennoch in (3.1) ein, stoßen wir auf die Wurzel aus einer negativen Zahl!

[4] Das Symbol $\forall$ bedeutet „für alle".

ist das Gleichheitszeichen voll gerechtfertigt. Ein Zusatz wie „$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$“ wird oft der Einfachheit halber weggelassen, aber im Fall einer Identität sollte er stets mitgedacht werden.

Wie kommt man aber nun von $(a+b)^2-(a-b)^2$ zu $4\,a\,b$? Durch Anwendung der grundlegenden Rechengesetze! Die oben erwähnten Kommutativgesetze der Addition und der Multiplikation beherrschen wir so sicher, dass sie in diesem Zusammenhang kaum der Rede wert sind (ob man $a+b$ durch $b+a$ oder $4\,a\,b$ durch $4\,b\,a$ oder durch $a\,b\cdot 4$ ersetzt, spielt keine Rolle), aber das Distributivgesetz (1.4) sollte man gut kennen und richtig anwenden können. Wir benutzen es, um die Klammern in $(a+b)^2$ und $(a-b)^2$ „auszumultiplizieren“, hier ganz langsam Schritt für Schritt vorgeführt. Schritt 1:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)\,a + (a+b)\,b. \tag{5.2}$$

Erkennen Sie, was passiert ist? Sie können sich das Distributivgesetz (1.4) auch mit vertauschten Rollen der Symbole in der Form $c\,(a+b) = c\,a + c\,b$ vor Augen halten. Ersetzen wir darin c durch $a+b$, so landen wir genau bei (5.2). Nun ist jeder der Summanden im Ergebnis von (5.2) von einer Form, die eine nochmalige Anwendung des Distributivgesetzes nahelegt. (Dass a und b jetzt als Faktoren auftreten, die *rechts* von den Klammern stehen, ist unerheblich, da es beim Multiplizieren nicht auf die Reihenfolge ankommt.) Daher Schritt 2:

$$(a+b)\,a + (a+b)\,b = a^2 + b\,a + a\,b + b^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2, \tag{5.3}$$

wobei wir $b\,a$ durch $a\,b$ ersetzt und ihre Summe zu $2\,a\,b$ zusammengefasst haben. Die Schritte 3 und 4 machen eine analoge Umformung mit $(a-b)^2$. Führen Sie sie selbst aus! Sie sollten auf

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2 \tag{5.4}$$

kommen. Zuletzt fügen wir alles wieder zusammen:

$$\begin{aligned}(a+b)^2-(a-b)^2 &= a^2+2\,a\,b+b^2-(a^2-2\,a\,b+b^2) = \\ &= a^2+2\,a\,b+b^2-a^2+2\,a\,b-b^2 = 2\,a\,b+2\,a\,b = 4\,a\,b,\end{aligned} \tag{5.5}$$

wobei ein letztes Mal das Distributivgesetz verwendet wurde, weil ein Minuszeichen vor einer Klammer aufgetreten ist[5]. Im vorletzten Schritt wurde berücksichtigt, dass $a^2 - a^2 = 0$ und $b^2 - b^2 = 0$ ist. Fertig! In der Praxis macht man Umformungen wie diese in einem einzigen, größeren Schritt: Alle Klammern ausmultiplizieren, gegebenenfalls Faktoren von Produkten vertauschen, zusammenfassen und wegstreichen, was wegfällt.

Manche Identitäten haben eine geometrische Bedeutung, die ihre Gültigkeit mit einem Schlag erweist. So kann beispielsweise der Term $(a+b)^2-(a-b)^2$ als gesamter Flächeninhalt von vier Rechtecken gedeutet werden, die wie in Abbildung 1 (links) aneinander gelegt werden, und der Term $4\,a\,b$ als gleich großer Flächeninhalt, wobei die Rechtecke aber nun anders aneinander gelegt werden (rechts). So ergibt sich zwanglos die Identität (2.1).

Wir erwähnen noch zwei Umformungsregeln, die der Vereinfachung von Termen dienen:

[5] In Umformungen wie $-(x+y) = -x-y$ oder $-(x-y) = -x+y$ wird nichts anderes als das Distributivgesetz mit -1 als Faktor vor der Klammer, zusammen mit der Regel $(-1)x = -x$ verwendet. Generell gilt das Distributivgesetz auch für mehr als zwei Summanden in der Klammer, was bei der Umformung $-(a^2-2\,a\,b+b^2) = -a^2+2\,a\,b-b^2$ verwendet wurde.

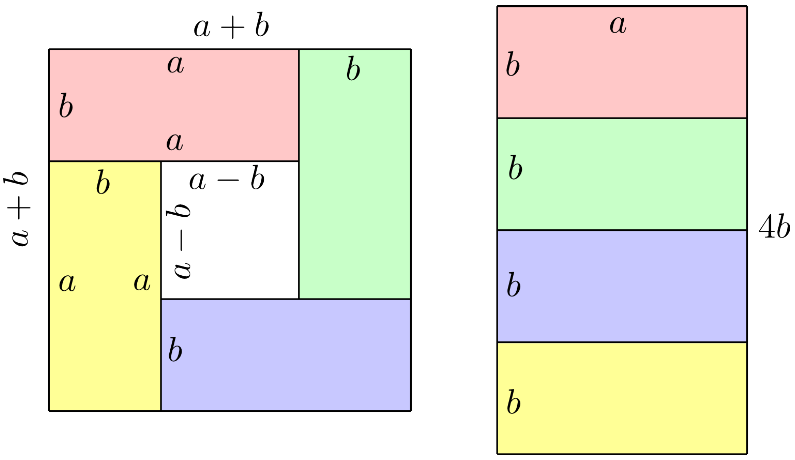


Abbildung 1: Vier Rechtecke mit Seitenlängen a und b (wobei $a > b$) werden so aneinander gelegt wie links skizziert. Ihr gesamter Flächeninhalt ist gleich dem Flächeninhalt des großen, die gesamte Anordnung umfassenden Quadrats mit Seitenlänge $a + b$, also $(a + b)^2$, *minus* dem Flächeninhalt des frei bleibenden weißen Quadrats in der Mitte mit Seitenlänge $a - b$, also $(a - b)^2$. Insgesamt ist der Flächeninhalt der vier Rechtecke also gleich $(a + b)^2 - (a - b)^2$. Andererseits können wir die vier Rechtecke so aneinanderlegen wie rechts gezeigt. Ihr gesamter Flächeninhalt ist $4\,a\,b$. Daher gilt $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4\,a\,b$ (zunächst für $a > b$, aber genauso kann man argumentieren, wenn $a < b$ ist, und der Fall $a = b$ ist gänzlich trivial, da dann das weiße Quadrat in der Mitte verschwindet).

- In Berechnungen treten oft Summen von Termen auf, die sich nur durch die numerischen Vorfaktoren unterscheiden, wie in $2\,a^2\,b + 3\,a^2\,b$. Eine solche Summe kann zu einem einzigen Term zusammengefasst werden:

$$2\,a^2\,b + 3\,a^2 b = 5\,a^2\,b, \tag{5.6}$$

  ein Regel, die aufgrund unseres „Alltagsverstands" einleuchtet (ebenso wie wir „2 Euro $+\ 3$ Euro $= 5$ Euro" rechnen), und die sich formal aus dem Distributivgesetz ergibt[6]. Wir haben sie bereits in (5.3) in der Form $b\,a + a\,b = 2\,a\,b$ und in (5.5) in der Form $2\,a\,b + 2\,a\,b = 4\,a\,b$ angewandt.

- Müssen im Zuge einer Termumformung zwei Potenzen mit der gleichen Basis[7] multipliziert werden, so benutzen Sie die Regel

$$a^m a^n = a^{m+n}, \tag{5.7}$$

  beispielsweise $a \cdot a^2 = a^3$ oder $x^2\,x^3 = x^5$. Damit können Sie etwa die Umformung

$$a\,(a^2 + b^2) - a\,b^2 = a^3 + a\,b^2 - a\,b^2 = a^3 \tag{5.8}$$

  durchführen.

Er gibt nun allerdings keine Gewähr, dass beim Umformen eines Terms immer etwas erkennbar Einfacheres herauskommt als der Term, von dem man ausgegangen ist. So können Sie

[6] Und zwar (anhand des obigen Beispiels) so: $2\,a^2\,b + 3\,a^2\,b = (2 + 3)\,a^2\,b = 5\,a^2\,b$.
[7] Zur Erinnerung: a^n ist eine Potenz, a heißt Basis und n heißt Exponent oder Hochzahl.

beispielsweise analog zum obigen Beispiel (2.1), das wir von (5.1) bis (5.5) Schritt für Schritt durchgerechnet haben, die Umformung

$$2(a+b)^2-(a-b)^2=a^2+6\,a\,b+b^2 \tag{5.9}$$

durchführen (machen Sie es zur Übung!). Ob man damit eine Vereinfachung erzielt hat, ist jetzt nicht mehr so klar und hängt in konkreten Anwendungen davon ab, was man mit so einem Term in weiterer Folge noch machen möchte. Hier zwei Möglichkeiten:

- Stehen etwa a und b für Dezimalzahlen mit vielen Nachkommastellen, und muss man die durch den Term dargestellten Zahlen eine Million mal jeweils für verschiedene Werte von a und b berechnen, so wird ein Computer schneller sein, wenn er die ursprüngliche Form $2(a+b)^2-(a-b)^2$ benutzt, da hier nur zwei „schwierige" Multiplikationen auszuführen sind, in $a^2+6\,a\,b+b^2$ jedoch drei.
- Geht es aber etwa darum, herauszufinden, wie man a bei gegebenem b wählen muss, damit der Zahlenwert des Terms gleich 1 ist (eine Fragestellung, wie sie in einer realistischen Anwendung durchaus auftreten kann), so landet man bei einer quadratischen Gleichung[8], die mit einer entsprechenden Lösungsformel nach a gelöst werden kann. Für eine derartige Berechnung eignet sich die Form $a^2+6\,a\,b+b^2$ besser.

Sie sehen, dass Termumformungen zu gewissen Zwecken gemacht werden, auch wenn sie Ihnen (vor allem zu Beginn, wenn Sie die Sache etwas üben sollen) eher wie *l'art pour l'art* vorkommen mögen.

6 Klammern

Nun sind schon etliche Klammern vorgekommen, sodass es an der Zeit ist, etwas über ihren Gebrauch zu sagen:

- Der Zweck von Klammern besteht darin, Dinge zusammenzufassen. So bedeutet beispielsweise $3\cdot(4+5)$, dass zuerst $4+5$ berechnet werden soll, und erst danach wird die Multiplikation mit 3 ausgeführt. Das Gleiche gilt auch für Klammern, die Terme umfassen, in denen Symbole (Variablennamen) stehen.
- Aufgrund der Regel „Punktrechnung vor Strichrechnung" muss in $7\cdot 5-2$ keine Klammer geschrieben werden, wenn zuerst $7\cdot 5$ berechnet werden soll. Gäbe es diese Regel nicht, so müsste man $(7\cdot 5)-2$ schreiben. Das Gleiche gilt auch für die Division: In $2:9+8$ oder, was das Gleiche bedeutet, $\frac{2}{9}+8$ ist es nicht notwendig, eine Klammer zu schreiben, wenn gemeint ist, dass 8 zu $2:9$ bzw. $\frac{2}{9}$ addiert werden soll. Soll hingegen 2 durch $9+8$ dividiert werden, so ist $2:(9+8)$ bzw. $\frac{2}{9+8}$ zu schreiben, wobei im letzten Fall keine Klammer nötig ist, da die Schreibweise als Bruch die gewünschte Reihenfolge der Operationen bereits eindeutig ausdrückt.
- Wo immer keine Klammer nötig ist, ist es der Übersichtlichkeit halber meist besser, keine zu schreiben. Sehen Sie sich beispielsweise die folgende Aussage an: „Das Produkt von $a+3\,b$ mit $2\,x-y$ schreiben wir in der Form $(a+3\,b)\,(2\,x-y)$". Verstanden, wo eine Klammer angeschrieben wird und wo nicht?

[8] Quadratische Gleichungen kommen im Stoff dran, wenn Sie schon ein bisschen mit Termen umgehen können.

- Um die Struktur eines Terms zu erfassen, in dem Klammerausdrücke vorkommen, kann es sinnvoll sein, ihn „von innen“ her zu lesen und nicht „von links nach rechts“. Haben Sie beispielsweise den Term
$$(p+q)^2 + 5\,(r-s)^2 \tag{6.1}$$
vor sich und wollen sich erst mal grob darüber orientieren, welche Werte er annehmen kann, wenn für die Variablen konkrete reelle Zahlenwerte eingesetzt werden, so lesen Sie ihn am besten in der Form
$$\text{etwas}^2 + 5\cdot(\text{etwas anderes})^2\,. \tag{6.2}$$
Unabhängig davon, welche Werte die beiden „Etwasse“ haben, ist das Ergebnis immer ≥ 0. Und es ist nur dann gleich 0, wenn die beiden „Etwasse“ gleich 0 sind, d.h. wenn $p+q=0$ und $r-s=0$ ist. In allen anderen Fällen nimmt der Term einen positiven Wert an.

7 Rezept zum Ausmultiplizieren von Klammern

Wie die bisherigen Beispiele gezeigt haben, ist es im Zuge der Termrechnung des Öfteren notwendig, Produkte von Klammern, in denen Summen oder Differenzen stehen, auszumultiplizieren. Dazu können wir – wie es in (5.2) und (5.3) gemacht wurde – Schritt für Schritt das Distributivgesetz anwenden, aber einfacher ist es, sich eine allgemeinen Regel zu merken. Um sie kompakt formulieren zu können, fassen wir auch Differenzen als Summen auf. So ist etwa $a+2\,b-3\,c$ das Gleiche wie $a+2\,b+(-3\,c)$. Das Rezept lautet nun: **Jeder Summand der ersten Klammer wird mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert – und alle diese Produkte werden addiert**. Ein einfaches Beispiel:
$$(a+b)(x+y) = a\,x + a\,y + b\,x + b\,y. \tag{7.1}$$
Hier wurde zuerst der erste Summand der ersten Klammer (a) mit beiden Termen der zweiten Klammer multipliziert (so entsteht $a\,x + a\,y$) und danach der zweite Summand der ersten Klammer (b) mit beiden Termen der zweiten Klammer (so entsteht $b\,x + b\,y$). Das ist eine praktische Methode, die sich mit ein bisschen Übung leicht automatisieren lässt. Dabei hilft es mitunter, wenn Sie mit zwei Fingern auf die jeweiligen Summanden, die gerade multipliziert werden, zeigen. (Ein Finger der linken Hand zeigt auf a, ein Finger der rechten Hand zeigt zuerst auf x, dann auf y. Danach rückt der erste Finger weiter und zeigt auf b, und der zweite Finger zeigt wieder zuerst auf x, dann auf y). Nun ein Beispiel, in dem ein Minuszeichen vorkommt:
$$\begin{aligned}(a-b)(x+y) &= (a+(-b))\,(x+y) = \\ &= a\,x + a\,y + (-b)\,x + (-b)\,y = a\,x + a\,y - b\,x - b\,y.\end{aligned} \tag{7.2}$$
Um nicht so umständlich mit dem Minuszeichen hantieren zu müssen, rechnen wir das einfach in der Form
$$(a-b)(x+y) = a\,x + a\,y - b\,x - b\,y \tag{7.3}$$
aus. Jedes Produkt im Ergebnis mit b als Faktor hat ein Minuszeichen bekommen. Und jetzt ein Beispiel mit zwei Minuszeichen:
$$\begin{aligned}(a-b)(x-y) &= (a+(-b))\,(x+(-y)) = \\ &= a\,x + a\,(-y) + (-b)\,x + (-b)\,(-y) = a\,x - a\,y - b\,x + b\,y,\end{aligned} \tag{7.4}$$

was wir einfach in der Form

$$(a-b)(x-y) = a\,x - a\,y - b\,x + b\,y \tag{7.5}$$

berechnen. Wo zwei Minuszeichen in einem Produkt aufeinander treffen, wird ein Plus daraus (hier im letzten Summanden des Ergebnisses). Dieses Rezept überträgt sich natürlich auch auf Klammern, in denen mehr als zwei Summanden stehen.

8 Mehrfache Produkte von Termen

Um etwa das Produkt von mehr als zwei Termen, die ihrerseits Summen von Termen sind, auszumultiplizieren, beispielsweise

$$(a+2\,b)\,(3\,a^2-b^2)\,(b-2\,a), \tag{8.1}$$

verwenden Sie die (durch das Assoziativgesetz für die Multiplikation ausgedrückte) Tatsache, dass es auf die Reihenfolge, in der Sie die Produkte bilden, nicht ankommt. Sie können also etwa zuerst $(a+2\,b)\,(3\,a^2-b^2)$ berechnen und das Ergebnis mit $b-2\,a$ multiplizieren. Die Rechnung sieht dann so aus:

$$\begin{aligned}
&(a+2\,b)\,(3\,a^2-b^2)\,(b-2\,a) = (3\,a^3 - a\,b^2 + 6\,b\,a^2 - 2\,b^3)\,(b-2\,a) = \\
&= 3\,a^3\,b - 6\,a^4 - a\,b^3 + 2\,a^2\,b^2 + 6\,a^2\,b^2 - 12\,a^3\,b - 2\,b^4 + 4\,a\,b^3 = \\
&= -6\,a^4 - 9\,a^3\,b + 3\,a\,b^3 + 8\,a^2\,b^2 - 2\,b^4\,.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Gehen Sie die Rechnung Schritt für Schritt durch! Sie können erkennen, dass wir in allen Produkten a links von b gestellt haben, um im letzten Schritt besser zu erkennen, welche sich nur durch numerische Vorfaktoren unterscheiden und daher zusammengefasst werden können.

9 Terme richtig „anschauen“

Neben der Fähigkeit zu formalen Umformungen, also der korrekten Anwendung der jeweils geeigneten Rechengesetze, lohnt sich beim Umgang mit einem Term der Versuch, *seine Struktur zu verstehen*. Dabei sollten Sie das Entscheidende an den Variablen, nämlich für Zahlen zu stehen, nicht vergessen. Ein Beispiel dafür war (6.1). Betrachten wir als zweites Beispiel den „Bruchterm“

$$\frac{1}{x^2+3} \tag{9.1}$$

und gehen einige seiner Eigenschaften durch, die man auf den ersten Blick (durch „richtiges Anschauen“) erkennen kann:

- Für $x=0$ reduziert er sich auf $\frac{1}{3}$.
- Wird x, angefangen bei 0, größer gemacht, so wird der Nenner größer und der gesamte Bruch daher kleiner.

- Wird x *sehr groß* (eine Million), so wird der Zahlenwert des Terms *betragsmäßig sehr klein*.[9]
- Wird x *sehr groß* (eine Million), so wird der Zahlenwert des Terms ungefähr gleich jenem des (einfacheren) Terms $\frac{1}{x^2}$, denn im Vergleich zu einem sehr großen x (und einem noch größeren x^2) fällt der Summand 3, der im Nenner steht, kaum mehr ins Gewicht.
- Wird x durch $-x$ ersetzt, so ändert sich nichts, da $(-x)^2 = x^2$ ist. Daher wissen wir ohne jede Rechnung, dass der Term etwa für $x = -12.43$ den gleichen Wert annimmt wie für $x = 12.43$.
- Da x^2 nie negativ werden kann, ist der Nenner immer ≥ 3. Der gesamte Term (1 dividiert durch eine Zahl, die größer oder gleich 3 ist) kann daher nie größer als $\frac{1}{3}$ sein – egal, welche Zahl wir für x einsetzen.
- Da der Nenner nie 0 werden kann, kann der Term für *jedes* reelle x berechnet werden – ohne Einschränkung. Wir sagen daher, dass der Term für alle reellen x *wohldefiniert* ist.
- Für jedes reelle x ist der Term positiv. Aufgrund seiner Konstruktion kann er weder 0 noch negativ werden – egal, welche Zahl wir für x einsetzen.
- Da wir nun wissen, dass der Term für alle reellen x wohldefiniert ist, dass er stets positiv ist und nie größer als $\frac{1}{3}$ sein kann, gilt

$$0 < \frac{1}{x^2+3} \leq \frac{1}{3} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{9.2}$$

  Ein schönes Ergebnis, das wir praktisch ohne Berechnung, nur durch „richtiges Anschauen“ und elementares Zahlenverständnis erzielt haben!

Durch Beobachtungen dieser Art bekommt jeder Term so etwas wie eine „Individualität“, mit der wir uns anfreunden können. So können Sie beim Umgang mit Termen lernen, eine „Beziehung“ zu den mathematischen Objekten, mit denen Sie zu tun haben, aufzubauen – eine Fähigkeit, die das Verstehen erleichtert und sich insbesondere bei fortschreitendem Stoff bezahlt machen wird!

[9] Leider ist die Formulierung „sehr klein“ nicht ganz eindeutig: Sowohl 0.0001 als auch -10000 können als „sehr klein“ angesehen werden. Hier ist ersteres gemeint, daher zur Sicherheit der Zusatz „betragsmäßig“. In der Regel ist mit „betragsmäßig sehr klein“ gemeint: Der Betrag ist sehr viel kleiner als 1. Wenn so ein Zusatz fehlt, muss man aus dem Kontext erschließen, was genau mit „sehr klein“ gemeint ist.

10 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Beweisen Sie das Distributivgesetz $a\,(b+c) = a\,b + a\,c$ auf geometrische Weise! Benutzen Sie dazu zwei Rechtecke, eines mit Seitenlängen a und b, und eines mit Seitenlängen a und c!
  Lösung:

  Ordnen Sie die beiden Rechtecke in Gedanken so an,
  dass zwei Seiten der Länge a nebeneinander liegen!
  Die beiden so aneinander gelegten Rechtecke
  bilden gemeinsam ein Rechteck mit Seitenlängen a und $b+c$.
  Der gesamte Flächeninhalt ist daher einerseits gleich der „großen"
  Rechtecksfläche $a\,(b+c)$ und andererseits gleich der Summe
  der Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke, also $a\,b + a\,c$.

- Multiplizieren Sie die Klammern aus: $-(c-c^2) - c\,(c-1) =$
  Lösung:

  $$0$$

- Multiplizieren Sie die Klammern aus: $2\,a\,(a+x) - x\,(2a-x) =$
  Lösung:

  $$2\,a^2 + x^2$$

- Multiplizieren Sie die Klammern aus: $(u^2-t^2)\,(u+2\,t) - u\,(2\,t-u)\,(u+t) + 3\,t^2u =$
  Lösung:

  $$2\,u^3 + u^2t - 2\,t^3$$

- Multiplizieren Sie die Klammern aus: $(1-p)(1+p+p^2+p^3+p^4) =$
  Lösung:

  $1-p^5$. Alles andere fällt weg!

- Für welche Werte von y ist der Term $\frac{y+1}{y-1}$ wohldefiniert?
  Lösung:

  Für alle Werte $y \neq 1$. Für $y = 1$ ergibt sich eine Division durch 0.

- Welche Werte kann der Term $4+(x-2\,y)^4$ annehmen, wenn für x und y reelle Zahlen eingesetzt werden?
  Lösung:

  Er kann jeden Wert ≥ 4 annehmen.

- Eine etwas schwierigere Aufgabe: Wie müsste man r und s wählen, damit $\frac{1}{r-s}$ *sehr groß* ist? Geben Sie ein Beispiel an!
  Lösung:

  Es müsste $r > s$ sein, und die Differenz $r-s$ müsste sehr klein sein.
  Beispiel: Mit $r = 1.00001$ und $s = 1$ ist $\frac{1}{r-s} = 1$ Million.

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Überarbeitet im November 2015 und im April 2017 unter Mitwirkung von Harald Stockinger. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.