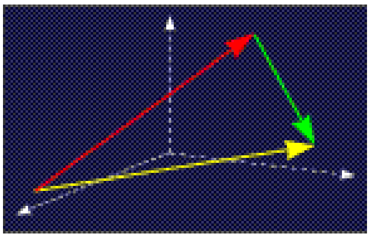
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Ungleichungen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum werden Ungleichungen und einige der wichtigsten Lösungsmethoden für Ungleichungen behandelt.

1 Ungleichungen allgemein

Eine **Ungleichung in einer Variablen** ist eine Aussage, dass ein gegebener Term kleiner, kleiner-gleich, größer oder größer-gleich einem anderen gegebenen Term ist, wobei zumindest einer der beiden Terme eine Variable enthält (die, wie bei Gleichungen, oft mit x bezeichnet wird). Ein Beispiel für eine Ungleichung ist

$$x + 2\,|x + 4| - 1 > \frac{4 - |x| + 3\,x^2}{x - 2}\,. \tag{1.1}$$

Wird für x ein konkreter Wert eingesetzt (wobei die Zahl 2 von vornherein nicht erlaubt ist, da die rechte Seite dann nicht definiert ist), so ergibt sich entweder eine wahre Aussage – dann nennen wir diesen x-Wert eine **Lösung** der Ungleichung – oder eine falsche Aussage (dann ist x natürlich *keine* Lösung). So kann durch simples Einsetzen leicht überprüft werden, dass die Zahl 1 eine Lösung von (1.1) ist, die Zahl 3 hingegen nicht.

In der Regel möchte man *alle* Lösungen einer Ungleichung kennen, und daher nennen wir die Menge aller Lösungen einer Ungleichung deren **Lösungsmenge**, für die meist das Symbol L verwendet wird. Wir beschränken uns in diesem Skriptum auf *reelle* Ungleichungen, d.h. wir nehmen an, dass die Variable reelle Werte annehmen kann. Die Lösungsmenge ist dann eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Beispielsweise ist – wie wir noch sehen werden – die Lösungsmenge der Ungleichung (1.1) gleich

$$L = \{x \in \mathbb{R}\,|\,x < 2 \text{ oder } x > 9\} \tag{1.2}$$

oder, in Intervallschreibweise[1],

$$L = (-\infty, 2) \cup (9, \infty)\,. \tag{1.3}$$

Lösungsmengen von Ungleichungen sind in vielen Fällen Intervalle oder Vereinigungen von Intervallen.

2 Lineare Ungleichungen und Äquivalenzumformungen

Eine **lineare Ungleichung** ist eine Ungleichung, bei der die Terme auf beiden Seiten von der Form $a\,x + b$ sind, wobei a und b vorgegebene reelle Zahlen sind. Ein Beispiel einer linearen Ungleichung ist

$$4\,x - 3 < 2\,x + 5. \tag{2.1}$$

Setzen wir beispielsweise $x = 1$ ein, so reduziert sie sich auf die (wahre) Aussage $1 < 7$. Daher ist 1 eine Lösung. Setzen wir $x = 6$ ein, so reduziert sie sich auf die (falsche) Aussage $21 < 17$. Daher ist 6 *keine* Lösung.

Wie finden wir die Lösungsmenge von (2.1)? Im Fall einer linearen Ungleichung gehen wir ähnlich vor wie beim Lösen einer linearen Gleichung[2]: Wir wenden bestimmte Umformungsregeln an, die aus einer Ungleichung eine andere Ungleichung machen, und zwar so, dass *die Lösungsmengen* der beiden Ungleichungen *dieselben sind*. Die zwei Ungleichungen nennen wir dann zueinander **äquivalent** und das Verfahren, das von der einen zur anderen führt, eine **Äquivalenzumformung**. Wir zählen nun die vier entscheidenden Äquivalenzumformungen auf, wobei wir unter *Ordnungszeichen* eines der vier Symbole $<$, $>$, $\leq$ und $\geq$ verstehen und mit „umdrehen" meinen, dass $<$ und $>$ vertauscht werden und dass $\leq$ und $\geq$ vertauscht werden. Die Begründungen beziehen sich auf die Umformung einer Ungleichung der Form $r < s$, sie sind aber auch auf die anderen Ungleichungstypen $r > s$, $r \leq s$ und $r \geq s$ anwendbar.

- **Zu beiden Seiten einer Ungleichung wird eine Zahl oder ein Term addiert**.
  Dass es sich dabei um eine Äquivalenzumformung handelt, folgt für eine Ungleichung der Form $r < s$ daraus, dass drei beliebige reelle Zahlen r, s und c die Beziehung $r < s$ genau dann erfüllen, wenn sie die Beziehung $r + c < s + c$ erfüllen, und Gleiches gilt für die drei anderen Ungleichungstypen. („Kleiner als" bedeutet auf der Zahlengeraden „links von", und die Operation „c addieren" bedeutet „um c verschieben". Ordnungsbeziehungen bleiben unter einer Verschiebung aufrecht.)

- **Beide Seiten einer Ungleichung werden mit einer positiven Zahl oder mit einem Term, von dem sichergestellt ist, dass er nur positive Werte annimmt, multipliziert**.
  Dass es sich dabei um eine Äquivalenzumformung handelt, folgt für eine Ungleichung der Form $r < s$ daraus, dass drei beliebige reelle Zahlen r, s und k mit $k > 0$ die Beziehung $r < s$ genau dann erfüllen, wenn sie die Beziehung $k\,r < k\,s$ erfüllen, und Gleiches gilt

[1] Intervalle wurden im Skriptum *Die Ordnung der reellen Zahlen* besprochen. Lesen Sie bitte nach, wenn Sie sich nicht mehr erinnern!

[2] Siehe das Skriptum *Lineare Gleichungen und Äquivalenzumformungen*.

für die drei anderen Ungleichungstypen. (Die Operation „mit einem positiven k multiplizieren" entspricht (sofern $k \neq 1$) auf der Zahlengeraden einer Streckung (für $k > 1$) oder einer Stauchung (für $k < 1$) des Abstands vom Nullpunkt. Ordnungsbeziehungen bleiben unter einer solchen Streckung bzw. Stauchung aufrecht.)

- **Beide Seiten einer Ungleichung werden mit einer negativen Zahl oder mit einem Term, von dem sichergestellt ist, dass er nur negative Werte annimmt, multipliziert, und gleichzeitig wird das Ordnungszeichen „umgedreht"**.
  Dass es sich dabei um eine Äquivalenzumformung handelt, folgt für eine Ungleichung der Form $r < s$ daraus, dass drei beliebige reelle Zahlen r, s und k mit $k < 0$ die Beziehung $r < s$ genau dann erfüllen, wenn sie die Beziehung $k\,r > k\,s$ erfüllen, und Gleiches gilt für die drei anderen Ungleichungstypen. (Die Operation „mit einem negativen k multiplizieren" entspricht auf der Zahlengeraden einer Spiegelung am Nullpunkt, für $k \neq -1$ gefolgt von einer Streckung oder Stauchung. Durch die Spiegelung wird jede Links-rechts-Beziehung „umgedreht".)
- **Die Ungleichung als Ganzes (inklusive Ordnungszeichen) wird „umgedreht", d.h. linke und rechte Seite werden vertauscht und das Ordnungszeichen „umgedreht"**.
  Dass es sich dabei um eine Äquivalenzumformung handelt, folgt für eine Ungleichung der Form $r < s$ daraus, dass zwei beliebige reelle Zahlen r und s die Beziehung $r < s$ genau dann erfüllen, wenn sie die Beziehung $s > r$ erfüllen, und Gleiches gilt für die drei anderen Ungleichungstypen.

Die zugrunde liegende Logik der Anwendung dieser Regeln ist die gleiche wie beim Gleichungslösen: Eine reelle Zahl x erfüllt genau dann eine gegebene Ungleichung, wenn es die aus dieser mit Hilfe einer der Umformungsregeln hervorgegangene (vereinfachte) Ungleichung erfüllt. Auf diese Weise erzeugen wir eine Abfolge von zueinander äquivalenten Ungleichungen, deren letzte uns die Lösung unmittelbar mitteilt.

Mit den vier Regeln kommen wir bei linearen Gleichungen stets durch. Wir demonstrieren das anhand der Ungleichung (2.1). Wie beim Gleichungslösen ist es zweckmäßig, die einzelnen Umformungsschritte in Form eines „Protokolls" zu notieren[3]:

$$\begin{array}{rcll} 4x-3 & < & 2x+5 & \mid\ -2x \\ 2x-3 & < & 5 & \mid\ +3 \\ 2x & < & 8 & \mid\ :2 \\ x & < & 4 & \end{array} \tag{2.2}$$

Dabei haben wir im letzten Umformungsschritt die Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ als Division durch 2 notiert. Die letzte der (zueinander äquivalenten) Ungleichungen ist so einfach, dass sie uns direkt die Lösungsmenge angibt. Sie besteht als allen reellen Zahlen, die kleiner als 4 sind:

$$L = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 4\} \tag{2.3}$$

oder, in Intervallschreibweise,

$$L = (-\infty, 4)\,. \tag{2.4}$$

[3] Siehe das Skriptum *Lineare Gleichungen und Äquivalenzumformungen.*

Wie beim Gleichungslösen sind in der Regel mehrere Strategien möglich, um eine Ungleichung zu lösen. Wir wollen das anhand der Ungleichung

$$3\,x+2 \geq 5\,x+8 \tag{2.5}$$

demonstrieren. Eine Lösungsvariante sieht so aus:

$$\begin{array}{rcll} 3\,x+2 & \geq & 5\,x+8 & \mid\ -5\,x \\ -2\,x+2 & \geq & 8 & \mid\ -2 \\ -2\,x & \geq & 6 & \mid\ :(-2) \\ x & \leq & -3 & \end{array} \tag{2.6}$$

Dabei wurde im dritten Umformungsschritt die Multiplikation mit $-\frac{1}{2}$ als Division durch -2 notiert (und entsprechend das Ordnungszeichen umgedreht). Die Lösungsmenge ist $L = (-\infty, -3]$. Die gleiche Aufgabe kann man aber auch so lösen:

$$\begin{array}{rcll} 3\,x+2 & \geq & 5\,x+8 & \mid\ -3\,x \\ 2 & \geq & 2\,x+8 & \mid\ -8 \\ -6 & \geq & 2\,x & \mid\ :2 \\ -3 & \geq & x & \mid\ \text{alles umdrehen} \\ x & \leq & -3 & \end{array} \tag{2.7}$$

Der letzte Schritt wird oft gar nicht mehr angeschrieben, da wir bereits die vorletzte Ungleichung in Gedanken von rechts nach links als „$x \leq -3$“ lesen können.

Soweit zu linearen Ungleichungen. Bei komplizierteren Ungleichungen kommen wir mit den genannten Äquivalenzumformungen nur in Ausnahmefällen aus und müssen andere Lösungsmethoden anwenden. Dabei treten immer wieder (sozusagen als Nebenprodukt) lineare Ungleichungen auf. Daher sollten Sie das bisher Gesagte kennen und im Einzelfall sicher anwenden können.

3 Ungleichungen lösen durch Gleichungslösen

Manchmal lässt sich eine Ungleichung lösen, indem man eine *Gleichung* löst. Wie das? Nehmen wir die Ungleichung (2.1) als Beispiel: Gehen wir von einer Zahl x aus und ändern sie geringfügig, so ändern sich die Werte auf beiden Seiten der Ungleichung ebenfalls nur geringfügig[4]. Wenn wir x auf der Zahlengeraden von einer Zahl, die eine Lösung ist, zu einer Zahl, die keine Lösung ist, bewegen, so muss x dazwischen irgendwo einen Wert annehmen, für den die rechte und die linke Seite der Ungleichung *gleich* sind, d.h. für den die Gleichung

$$4\,x-3 = 2\,x+5 \tag{3.1}$$

gilt. Die ist schnell gelöst: Die einzige Lösung ist die Zahl 4. Sie teilt die Zahlengerade in drei Mengen: alle Zahlen kleiner als 4, 4 selbst, und alle Zahlen größer als 4. Diese drei Mengen, $(-\infty, 4)$, $\{4\}$ und $(4, \infty)$, untersuchen wir nun nacheinander:

[4] Hinter diesem Verhalten steckt die Eigenschaft der *Stetigkeit*: Ändert sich x nur wenig, so ändert sich ein Term wie $4\,x-3$ ebenfalls nur wenig.

1. Das Intervall $(-\infty, 4)$: Innerhalb dieser Menge gibt es keine Zahl, für die die linke Seite von (2.1) gleich der rechten Seite wäre. Folglich besteht sie nur aus Lösungen oder nur aus Nicht-Lösungen! Was von beiden der Fall ist, finden wir leicht heraus, indem wir irgendeine Zahl aus dieser Menge in die Ungleichung einsetzen. Wir wählen die Zahl 3. Mit $x = 3$ reduziert sich (2.1) auf die wahre Aussage $9 < 11$, was bedeutet, dass die Zahl 3 eine Lösung der Ungleichung ist, und mit ihr auch alle anderen Elemente des Intervalls $(-\infty, 4)$.
2. Die Menge $\{4\}$: Ihr einziges Element erfüllt die Gleichung (3.1), d.h. die linke Seite ist nicht kleiner als die rechte. Die Zahl 4 ist daher *keine* Lösung der Ungleichung (2.1).
3. Das Intervall $(4, \infty)$: Innerhalb dieser Menge gibt es keine Zahl, für die die linke Seite von (2.1) gleich der rechten Seite wäre. Folglich besteht sie nur aus Lösungen oder nur aus Nicht-Lösungen! Was von beiden der Fall ist, finden wir leicht heraus, indem wir irgendeine Zahl aus dieser Menge in die Ungleichung einsetzen. Wir wählen die Zahl 5. Mit $x = 5$ reduziert sich (2.1) auf die falsche Aussage $17 < 15$, was bedeutet, dass die Zahl 5 keine Lösung der Ungleichung ist, und mit ihr auch alle anderen Elemente des Intervalls $(4, \infty)$.

Nun haben wir alle reellen Zahlen überprüft: Die Lösungen von (2.1) sind genau die Elemente des Intervalls $(-\infty, 4)$, was natürlich mit (2.3) bzw. (2.4) übereinstimmt.

Diese Methode kann auf zahlreiche kompliziertere Ungleichungen angewandt werden. Bei ihrer Anwendung ist meist ein bisschen weniger zu rechnen als bei anderen Methoden, aber man darf die grundsätzliche Logik nicht aus den Augen verlieren: Nachdem die Lösungen der zugehörigen Gleichung gefunden sind, müssen alle offenen Intervalle, die durch sie begrenzt werden *und* die ein-elementigen Mengen zwischen ihnen nacheinander untersucht werden, ob ihre Elemente Lösungen oder Nicht-Lösungen der gegebenen Ungleichung sind. Weiters ist zu bedenken, dass die Methode nur funktioniert, wenn beide Seiten der Ungleichung die Eigenschaft erfüllen, unter kleinen Änderungen von x ihre Werte ebenfalls nur geringfügig zu ändern.

Letzteres ist beispielsweise für **quadratische Ungleichungen** der Fall, bei denen beide Seiten von der Form $a\,x^2 + b\,x + c$ für gegebene Zahlen a, b und c sind (und ganz allgemein für Ungleichungen, deren beide Seiten Polynome[5] sind). Wir können dann immer die rechte Seite von beiden Seiten der Ungleichung subtrahieren (d.h. „auf die linke Seite bringen") und durch den Koeffizienten von x^2 dividieren (und das Ordnungszeichen umdrehen, falls er negativ ist), sodass eine quadratische Ungleichung immer in die äquivalente Form

$$x^2 + p\,x + q > 0 \tag{3.2}$$

oder eine Form, in der $>$ durch $<$, $\geq$ oder $\leq$ ersetzt ist, gebracht werden kann[6]. Sehen wir uns als Beispiel die quadratische Ungleichung

$$x^2 - 4\,x + 3 \geq 0 \tag{3.3}$$

[5] Siehe das Skriptum *Polynome*.

[6] Fallen durch diese Umformung die x^2-Glieder weg, so handelt es sich in Wahrheit um eine lineare Gleichung.

an! Wir lösen sie, indem wir zunächst die zugehörige (quadratische) Gleichung

$$x^2 - 4\,x + 3 = 0 \tag{3.4}$$

lösen. Die Lösungen sind 1 und 3. Die Zahlengerade zerfällt daher in fünf Teilmengen, die entweder nur aus Lösungen oder aus Nicht-Lösungen der Ungleichung (3.3) bestehen und getrennt untersucht werden können, indem man mit je einem beliebigen Element einen Test macht:

1. Das Intervall $(-\infty, 1)$: Mit $x = 0$ reduziert sich (3.3) auf die wahre Aussage $3 \geq 0$. Nur Lösungen!
2. Die Menge $\{1\}$: Die Zahl 1 erfüllt (3.4) und daher (3.3), da das Ordnungszeichen in (3.3) ein $\geq$ ist: $0 \geq 0$ ist eine wahre Aussage[7]. Lösung!
3. Das Intervall $(1, 3)$: Mit $x = 2$ reduziert sich (3.3) auf die falsche Aussage $-1 \geq 0$. Nur Nicht-Lösungen!
4. Die Menge $\{3\}$: Die Zahl 3 erfüllt (3.4) und daher (3.3). Lösung!
5. Das Intervall $(3, \infty)$: Mit $x = 4$ reduziert sich (3.3) auf die wahre Aussage $3 \geq 0$. Nur Lösungen!

Diese Ergebnisse setzen wir nun zusammen: Die Lösungen sind in den Intervallen $(-\infty, 1)$ und $(3, \infty)$ und in den Mengen $\{1\}$ und $\{3\}$ enthalten. Daher (in drei Schreibweisen, die alle das Gleiche aussagen, angeschrieben):

$$L = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 1 \text{ oder } x \geq 3\} = (-\infty, 1] \cup [3, \infty) = \mathbb{R} \backslash (1, 3). \tag{3.5}$$

Die letzte Variante drückt aus, dass die Lösungen von (3.3) alle reellen Zahlen sind, die nicht im Intervall $(1, 3)$ liegen[8].

Ein häufig auftretender Typ ist jener der **Bruch-Ungleichungen**, in denen, wie der Name sagt, Bruchterme vorkommen. Hier müssen wir aufpassen: Ein Bruchterm erfüllt nicht unbedingt die Bedingung, dass sich sein Wert unter einer kleinen Änderung von x nur geringfügig ändert. Setzen wir beispielswese in

$$\frac{1}{x - 2} \tag{3.6}$$

einmal einen x-Wert ein, der ein bisschen kleiner als 2 ist, und dann einen, der ein bisschen größer als 2 ist, so werden sich die Ergebnisse dramatisch unterscheiden: Für $x = 1.999$ hat er den Wert -1000, für $x = 2.001$ hat er den Wert 1000. Für $x = 2$ ist er nicht definiert, und wenn x über diese Stelle springt, so ändert sich sein Vorzeichen, was natürlich bedeutsam ist, wenn ein solcher Term in einer Ungleichung vorkommt! Dieser Situation müssen wir unsere Strategie des „Ungleichunglösens mittels Gleichungslösen“ anpassen: Zusätzlich zu den Lösungen der zugehörigen Gleichung kommen nun auch die Stellen, an denen ein Nenner

[7] Hätte die Ungleichung $x^2 - 4\,x + 3 > 0$ gelautet, so wäre die Zahl 1 keine Lösung, da $0 > 0$ eine falsche Aussage ist!

[8] Für zwei Mengen A und B ist $A \backslash B$ die Menge aller Elemente von A, die *nicht* Elemente von B sind.

Null wird, als Grenzen zwischen Bereichen von Lösungen und Bereichen von Nicht-Lösungen der Ungleichung in Frage.

Wir führen das anhand der Bruch-Ungleichung

$$\frac{3\,(x-1)}{x-2} < 4 \tag{3.7}$$

vor: Die linke Seite ist an der Stelle 2 nicht definiert. Analog zum Gleichungslösen notieren wir die **Definitionsmenge** $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, die Menge aller Zahlen, für die beide Seiten der Ungleichung definiert sind. Die zugehörige Gleichung

$$\frac{3\,(x-1)}{x-2} = 4 \tag{3.8}$$

besitzt die gleiche Definitionsmenge, und nach Multiplikation beider Seiten mit $x-2$ (was wir dürfen, da $x-2 \neq 0$ für jedes $x \in D$) ergibt sich die Gleichung

$$3\,(x-1) = 4\,(x-2)\,, \tag{3.9}$$

deren einzige Lösung die Zahl 5 ist. Die möglichen Grenzen zwischen Bereichen von Lösungen und Bereichen von Nicht-Lösungen der Ungleichung (3.7) sind daher die Zahlen 2 und 5, woraus sich vier[9] Teilmengen der Zahlengeraden ergeben, die es nacheinander zu untersuchen gilt:

1. Das Intervall $(-\infty, 2)$: Mit $x = 1$ reduziert sich (3.7) auf die wahre Aussage $0 < 4$. Nur Lösungen!
2. Das Intervall $(2, 5)$: Mit $x = 3$ reduziert sich (3.7) auf die falsche Aussage $6 < 4$. Nur Nicht-Lösungen!
3. Die Menge $\{5\}$: Die Zahl 5 erfüllt (3.8) und daher nicht (3.7). Nicht-Lösung!
4. Das Intervall $(5, \infty)$: Mit $x = 6$ reduziert sich (3.3) auf die wahre Aussage $\frac{15}{4} < 4$. Nur Lösungen!

Aus diesen Ergebnissen setzen wir die Lösungsmenge zusammen:

$$L = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 2 \text{ oder } x > 5\} = (-\infty, 2) \cup (5, \infty) = \mathbb{R}\backslash[2, 5]. \tag{3.10}$$

Bei noch komplizierteren Ungleichungen als den bisher besprochenen kann auch die Methode, anstelle einer gegebenen Ungleichung die zugehörige Gleichung zu lösen, unangenehm aufwändig werden. In diesem Fall kann eine **grafische Methode** einen ersten Aufschluss über die Lösungsmenge und die Lösungen der zugehörigen Gleichung geben. Wir machen damit genau genommen einen Vorgriff auf das Thema Funktionen, aber er ist nicht schwer zu verstehen: Wir formen die Ungleichung zunächst so um, dass auf der rechten Seite 0 steht. In einem zweidimensionalen Diagramm mit zwei aufeinander normal stehenden Koordinatenachsen wird

[9] Die Menge $\{2\}$ müssen wir nicht untersuchen, da ihr einziges Element nicht in D liegt und daher von vornherein nicht als Lösung in Frage kommt.

zu jedem Wert x der (als Zahlengerade aufgefassten) „horizontalen" Achse (x-Achse) in „vertikaler" Richtung (in y-Richtung, wie es oft heißt) der Wert der linken Seite der Ungleichung aufgetragen. Daraus ergibt sich in der Regel eine Kurve oder die Vereinigung mehrerer Kurvenstücke in der Ebene. Aus einem solchen Diagramm ist (zumindest näherungsweise) sofort ablesbar, für welche x-Werte die linke Seite der Ungleichung größer, größer-gleich, kleiner oder kleiner-gleich 0 ist (und welche x-Werte gar nicht in der Definitionsmenge liegen, weil ihnen kein Wert entspricht). Computeralgebra-Systeme (wie *Mathematica* oder *GeoGebra*) sind in der Lage, solche Diagramme zu zeichnen.

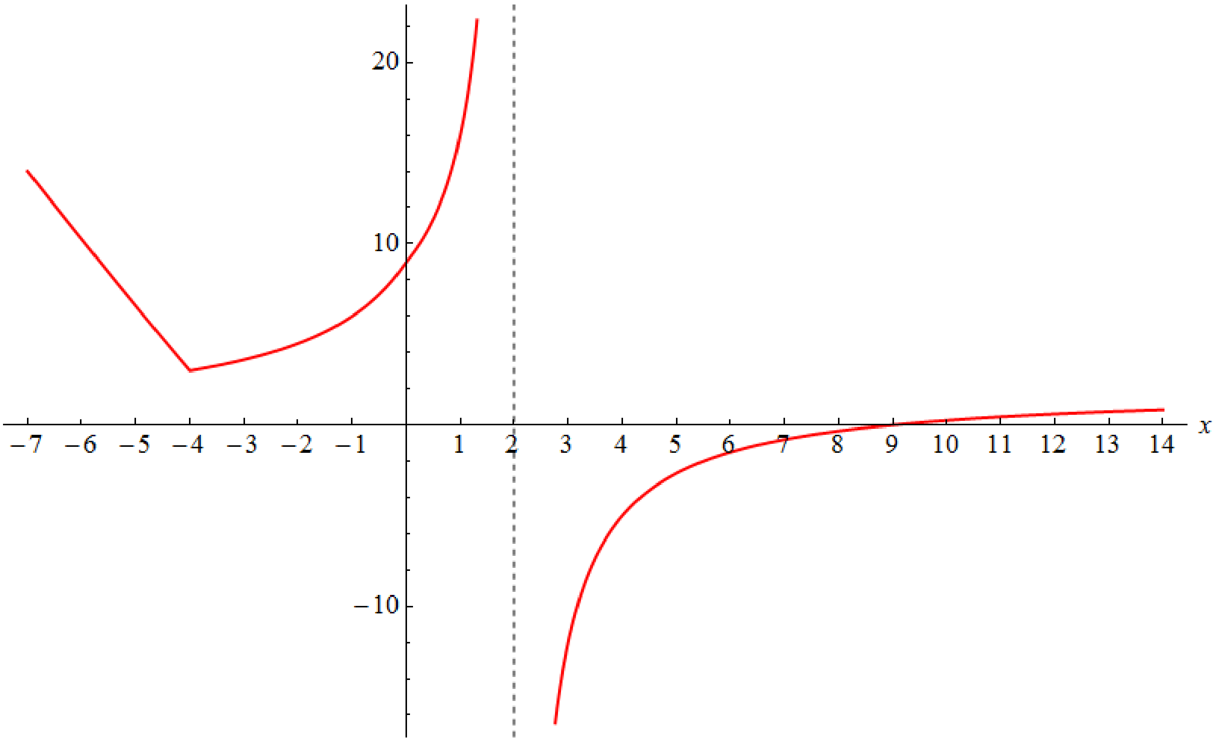


Abbildung 1: Ein Plot der Werte des Terms $x + 2\,|x+4| - 1 - \dfrac{4 - |x| + 3\,x^2}{x-2}$. Er hilft, die Lösung der zur Ungleichung (3.11) gehörenden Gleichung und damit die Lösungsmenge der Ungleichung zu finden.

Wir demonstrieren das anhand des eingangs erwähnten Ungetüms von Ungleichung (1.1). Wir schreiben sie in die Form

$$x + 2\,|x+4| - 1 - \frac{4 - |x| + 3\,x^2}{x-2} > 0 \tag{3.11}$$

um und erstellen einen „Plot" des Terms, der nun auf der linken Seite steht. Er ist in Abbildung 1 wiedergegeben. Wir erkennen, dass der Wert $x = 2$ nicht zur Definitionsmenge gehört (was wegen des Nenners in (3.11) klar ist) und dass es bei (oder in der Nähe von) $x = 9$ eine Lösung der zugehörigen Gleichung gibt. Also untersuchen wir den Term in der Nähe von $x = 9$. Dort sind $x + 4$ und x positiv, sodass wir die Betragszeichen weglassen können, um die

Lösungen der zugehörigen Gleichung in der Nähe der Zahl 9 zu finden. Wir versuchen also, die modifizierte Gleichung

$$x + 2\,(x+4) - 1 - \frac{4 - x + 3\,x^2}{x-2} \;=\; 0 \tag{3.12}$$

zu lösen. Nach Multiplikation mit $x - 2$ stellt sich heraus, dass sie sich zu

$$2\,x - 18 = 0 \tag{3.13}$$

vereinfacht! Die (einzige) Lösung (der x-Wert, bei dem die Kurve in Abbildung 1 die x-Achse schneidet) ist exakt 9. Wir vertrauen dem Computertool, dass die zu (3.11) gehörende Gleichung außer 9 keine weitere Lösung besitzt, und sehen uns noch die x-Werte an, für die die Kurve oberhalb der x-Achse liegt: Es sind alle Werte kleiner als 2 und alle Werte größer als 9. Damit ergibt sich die Lösungsmenge zu (1.2) bzw. (1.3). Wer hätte gedacht, dass eine so kompliziert aussehende Ungleichung wie (1.1) mit ein bisschen Computerhilfe nicht nur näherungsweise, sondern sogar exakt zu lösen ist!

4 Fallunterscheidungen

Eine Methode, die beim Lösen von Ungleichungen oft hilft, ist die Methode der Fallunterscheidungen. Sie kann vor allem in zwei Situationen angewandt werden:

- Wenn man, um eine Ungleichung zu vereinfachen, beide Seiten mit einem Term multiplizieren will, aber dessen Vorzeichen nicht kennt (und daher nicht weiß, ob man nun das Ordnungszeichen umdrehen muss), so kann man die beiden Fälle „Term ist positiv" und „Term ist negativ" getrennt behandeln.
- Wenn in einer Ungleichung Betragszeichen vorkommen, so kann man eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen der Terme, deren Betrag gebildet wird, vornehmen und diese Fälle (in denen dann keine Betragszeichen mehr vorkommen) getrennt behandeln. Der Grund dafür[10] liegt darin, dass $|a| = a$, falls $a \geq 0$ und $|a| = -a$, falls $a < 0$.

Grundsätzlich ist die Logik der Fallunterscheidungen hier die gleiche wie im Zusammenhang mit Gleichungen[11]. Wichtig ist, dass die Gesamtheit der unterschiedenen Fälle *alle* Möglichkeiten umfasst. In der Regel werden die Fälle so gewählt, dass sie einander ausschließen.

Wir führen die Methode zuerst anhand der **Bruch-Ungleichung** (3.7) vor, die wir bereits mit einer anderen Methode gelöst haben. Also:

$$\frac{3\,(x-1)}{x-2} < 4\,. \tag{4.1}$$

Man würde gern mit $x - 2$ multiplizieren, aber ob das Ordnungszeichen umgedreht werden muss, hängt davon ab, ob $x - 2$ positiv oder negativ ist. Das sind unsere beiden Fälle[12]:

[10] Siehe das Skriptum *Absolutbetrag*.
[11] Siehe das Skriptum *Betragsgleichungen und die Methode der Fallunterscheidungen*.
[12] Der Fall $x - 2 = 0$ kann nicht eintreten, da 2 nicht in der Definitionsmenge von (4.1) enthalten ist.

1. **Fall** $x - 2 > 0$**, d.h.** $x > 2$
   In diesem Fall werden beide Seiten der Ungleichung (4.1) mit $x-2$ multipliziert, ohne das Ordnungszeichen umzudrehen. Wir erhalten die lineare Ungleichung $3\,(x-1) < 4\,(x-2)$, was nach einer kleinen Umformung auf die äquivalente Ungleichung $x > 5$ führt. Unter allen reellen Zahlen x, die $x > 2$ erfüllen, sind daher all jene, die zusätzlich $x > 5$ erfüllen, Lösungen von (4.1). Das entspricht einer Teil-Lösungsmenge $L_1 = (5, \infty)$.

2. **Fall** $x - 2 < 0$**, d.h.** $x < 2$
   In diesem Fall werden beide Seiten der Ungleichung (4.1) mit $x-2$ multipliziert und das Ordnungszeichen umgedreht. Wir erhalten die lineare Ungleichung $3\,(x-1) > 4\,(x-2)$, was nach einer kleinen Umformung auf die äquivalente Ungleichung $x < 5$ führt. Unter allen reellen Zahlen x, die $x < 2$ erfüllen, sind daher all jene, die zusätzlich $x < 5$ erfüllen (was in diesem Fall alle tun), Lösungen von (4.1). Das entspricht einer Teil-Lösungsmenge $L_2 = (-\infty, 2)$.

Insgesamt ist daher die Lösungsmenge der Ungleichung (4.1) durch

$$L = L_1 \cup L_2 = (5, \infty) \cup (-\infty, 2) \overset{\text{schön geordnet}}{=} (-\infty, 2) \cup (5, \infty) = \mathbb{R} \backslash [2, 5] \tag{4.2}$$

gegeben, was natürlich gleich der bereits früher erhaltenen Lösung (3.10) ist.

Und nun eine Demonstration der Methode der Fallunterscheidungen anhand der **Betrags-Ungleichung**

$$|2\,x + 1| < x + 5. \tag{4.3}$$

Wären die Betragszeichen nicht, dann hätten wir eine lineare Ungleichung vor uns, die leicht zu lösen ist. Wir unterscheiden die beiden Fälle $2\,x + 1 \geq 0$ und $2\,x + 1 < 0$.

1. **Fall** $2\,x + 1 \geq 0$**, d.h.** $x \geq -\frac{1}{2}$
   In diesem Fall ist $|2x+1| = 2x+1$. Die Ungleichung (4.3) vereinfacht sich zu $2\,x+1 < x + 5$, was nach einer kleinen Umformung auf die äquivalente Ungleichung $x < 4$ führt. Unter allen reellen Zahlen x, die $x \geq -\frac{1}{2}$ erfüllen, sind daher all jene, die zusätzlich $x < 4$ erfüllen, Lösungen von (4.3). Das entspricht einer Teil-Lösungsmenge $L_1 = [-\frac{1}{2}, 4)$.

2. **Fall** $2\,x + 1 < 0$**, d.h.** $x < -\frac{1}{2}$
   In diesem Fall ist $|2x + 1| = -2x - 1$. Die Ungleichung (4.3) vereinfacht sich zu $-2\,x - 1 < x + 5$, was nach einer kleinen Umformung auf die äquivalente Ungleichung $x > -2$ führt. Unter allen reellen Zahlen x, die $x < -\frac{1}{2}$ erfüllen, sind daher all jene, die zusätzlich $x > -2$ erfüllen, Lösungen von (4.3). Das entspricht einer Teil-Lösungsmenge $L_2 = (-2, -\frac{1}{2})$.

Insgesamt ist daher die Lösungsmenge der Ungleichung (4.3) durch

$$L = L_1 \cup L_2 = [-\frac{1}{2}, 4) \cup (-2, -\frac{1}{2}) \overset{\text{schön geordnet}}{=} (-2, -\frac{1}{2}) \cup [-\frac{1}{2}, 4) = (-2, 4) \tag{4.4}$$

gegeben.

Wir erwähnen noch, dass es manchmal nützlich ist, sich an die Bedeutung des **Betrags der Differenz zweier reeller Zahlen** als deren **Abstand auf der Zahlengeraden** zu erinnern[13]. So sollten Sie beispielsweise die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x-6|<2 \tag{4.5}$$

ohne großartige Berechnung als $L=(4,8)$ erkennen, also als Menge aller reellen Zahlen, deren Abstand von der Zahl 6 kleiner als 2 ist. Auch kompliziertere Betrags-Ungleichungen wie

$$|x-3|+|x+3|\geq 8 \tag{4.6}$$

können mit ein bisschen Denkakrobatik auf diese Weise gelöst werden[14]. (4.6) besagt, dass die Summe der Abstände von x zu den Zahlen 3 und -3 nicht kleiner als 8 ist. Liegt x zwischen -3 und 3, so ist das nicht erfüllt, denn dann ist diese Summe 6. Überlegen Sie, ohne eine Rechnung aufzuschreiben, wie weit x von 3 nach rechts oder von -3 nach links wandern muss, damit (4.6) erfüllt ist! Lösung:

$$L=(-\infty,-4]\cup[4,\infty).$$

5 Ungleichungen als Identitäten

Zum Abschluss erwähnen wir, dass Ungleichungen auch mehrere Variable enthalten können. Ist eine solche Ungleichung für alle Werte der auftretenden Variablen erfüllt, so nennen wir sie eine **Identität**. Das wichtigste Beispiel ist die **Dreiecksungleichung**

$$|x+y|\ \leq\ |x|+|y|\,. \tag{5.1}$$

Sie gilt für beliebige $x,y\in\mathbb{R}$ und besagt, dass der Abstand zweier reeller Zahlen auf der Zahlengeraden nie größer ist als die Summe der Abstände der beiden Zahlen vom Nullpunkt. Oder, etwas plastischer mit Hilfe zweier Städte auf einer Straße mit Kilometermarkierungen ausgedrückt: Wenn

- Person A direkt von x nach y fährt,
- Person B hingegen von x zum Nullpunkt der Kilometermarkierungen und von dort nach y,

so ist der Weg, den Person A zurücklegt, nie länger als jener, den Person B zurücklegt.

Falls Sie wissen, was ein Vektor und sein Betrag ist und was das Skalarprodukt zweier Vektoren ist, so können wir Ihnen eine weitere Unleichung vorstellen, die eine Identität ist. Sie lautet

$$|\,\vec{u}\cdot\vec{v}\,|\ \leq\ |\vec{u}|\ |\vec{v}|\,, \tag{5.2}$$

heißt **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung** und gilt für Vektoren in beliebigen Dimensionen.

[13] Am Ende des Skriptums *Absolutbetrag* wurden *de facto* einfache Betrags-Ungleichungen unter diesem Gesichtspunkt diskutiert (obwohl sie dort nicht so genannt wurden).

[14] Eine andere Lösungsmöglichkeit wäre die Methode der Fallunterscheidungen, wobei nun drei Fälle ($x<-3$, $-3\leq x<3$ und $x\geq 3$) zu betrachten wären, die jeweils auf eine lineare Ungleichung führen.

6 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Lösen Sie die Ungleichung $3\,x+5 > 7\,x-3$ durch Anwendung von Äquivalenzumformungen!
  Lösung:

  Die Lösungsmenge ist $L = (-\infty, 2)$.

- Lösen Sie die Ungleichung $x^2 - 2\,x - 3 < 0$ mit der Methode „Ungleichunglösen mittels Gleichungslösen"!
  Lösung:

  Die Lösungsmenge ist $L = (-1, 3)$.

- Lösen Sie die Ungleichung $\dfrac{x-1}{x-4} > \dfrac{x-4}{x-1}$ mit der Methode „Ungleichunglösen mittels Gleichungslösen"!
  Lösung:

  Die Lösungsmenge ist $L = (1, \frac{5}{2}) \cup (4, \infty)$.

- Lösen Sie die Ungleichung $\dfrac{3\,(x-2)}{x-4} \geq 4$ mit der Methode der Fallunterscheidungen!
  Lösung:

  Die Lösungsmenge ist $L = (4, 10]$.

- Lösen Sie die Ungleichung $|2\,x-1| > 3\,x-2$ mit der Methode der Fallunterscheidungen!
  Lösung:

  Die Lösungsmenge ist $L = (-\infty, 1)$.

- Lösen Sie die Ungleichung $|x-4| < |x-2|$ lediglich durch Ausnutzung der Bedeutung des Betrags der Differenz zweier reeller Zahlen als deren Abstand auf der Zahlengeraden, ohne eine Rechnung aufzuschreiben!
  Lösung:

  Die Lösungsmenge ist $L = (3, \infty)$.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juli 2015 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen" (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Überarbeitet im November 2015 und im April 2017 unter Mitwirkung von Harald Stockinger. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.