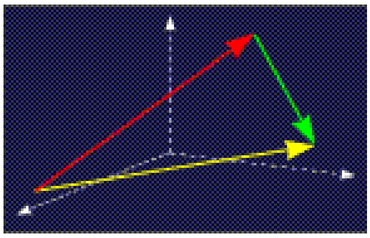
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Bruchgleichungen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum werden Bruchgleichungen behandelt. Da es bei einer Bruchgleichung darauf ankommt, zunächst ihre Definitionsmenge zu erkennen, beginnen wir mit diesem Thema und sehen uns danach an, wie Bruchgleichungen gelöst werden können.

1 Definitionsmenge einer Bruchgleichung

Als **Bruchgleichung** wird eine Gleichung bezeichnet, in der Bruchterme vorkommen. Der Begriff ist ein bisschen unscharf, wenn nicht genau dazu gesagt wird, welche Typen von Termen in den Zählern und Nennern der auftretenden Brüche stehen. Wir wollen uns hier auf den Fall beschränken, dass es sich um *Polynome* handelt.

Ein Beispiel für eine Bruchgleichung dieses Typs (in der Variablen x) ist

$$\frac{2\,x+3}{x+1}=\frac{2\,x}{x-5}\,. \tag{1.1}$$

Sie stellt die Frage dar, ob es eine oder mehrere reelle Zahlen x gibt, für die die Aussage (1.1) wahr ist, und, falls ja, um welche Zahl(en) es sich dabei handelt.

Als *Grundmenge* aller in diesem Skriptum behandelten Gleichungen wählen wir die Menge der reellen Zahlen: $G=\mathbb{R}$. Das bedeutet, dass wir jede reelle Zahl, die die betreffende Gleichung erfüllt, als Lösung akzeptieren. Bei Bruchgleichungen tritt nun ein Phänomen auf, dem wir in den Skripten zu linearen und quadratischen Gleichungen noch nicht begegnet sind: Da der Nenner eines Bruchs nicht gleich 0 sein darf (andernfalls würde es sich ja um eine Division durch 0 handeln), müssen einige der zunächst möglichen Elemente der Grundmenge (d.h. einige Werte für x) von vornherein *ausgeschlossen werden*. Im Fall der Gleichung (1.1) handelt es sich um die Werte $x=-1$ (für diesen Wert wäre der Nenner der linken Seite gleich 0) und $x=5$ (für diesen Wert wäre der Nenner der rechten Seite gleich 0). Diese beiden Werte schließen wir aus, indem wir als **Definitionsmenge** der Gleichung (1.1) die Menge aller reellen Zahlen, für die *keiner* der auftretenden Nenner 0 ist, festlegen. Wir schreiben diese Menge so an:

$$D = \mathbb{R} \backslash \{-1, 5\}\,. \tag{1.2}$$

Das Symbol $\backslash$ ist das mengentheoretische „ohne"[1]. Stattdessen können wir auch genausogut $D = G\backslash\{-1, 5\}$ schreiben, da die Grundmenge G ja gleich $\mathbb{R}$ ist. Eine dritte Möglichkeit, D anzuschreiben, ist diese:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq -1 \,\text{und}\, x \neq 5\}\,. \tag{1.3}$$

Auf die Schreibweise kommt es nicht an – wichtig ist nur, dass wir in der Lage sind, von jeder Zahl zu entscheiden, ob sie Element von D ist oder nicht. Bei *jeder* Behandlung einer Bruchgleichung sollten Sie zuerst die Definitionsmenge angeben[2]! Das ist schlicht und einfach deshalb wichtig, da sich die betreffende Gleichung erst dann, wenn die Definitionsmenge angegeben ist, in exakter Weise als mathematisches Problem darstellt:

- Für jedes Element $x \in D$ sind sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung definiert (und können miteinander verglichen werden).
- Die Lösungsmenge L besteht dann aus allen Elementen der Definitionsmenge D, die die betreffende Gleichung erfüllen (d.h. für die die linke Seite gleich der rechten ist).

2 Bruchgleichungen lösen

Um eine Bruchgleichung zu lösen, ist es in den meisten Fällen eine gute Strategie, zuerst alle Brüche loszuwerden. Betrachten wir als Beispiel die Gleichung (1.1). Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung mit $(x+1)\,(x-5)$ multiplizieren, bekommen wir eine neue Gleichung, in der keine Brüche mehr aufscheinen:

$$\begin{array}{rcll} \frac{2\,x+3}{x+1} & = & \frac{2\,x}{x-5} & \quad | \quad \cdot\,(x+1)\,(x-5) \\ (2\,x+3)\,(x-5) & = & 2\,x\,(x+1) & \end{array} \tag{2.1}$$

„Dürfen" wir das überhaupt? Ja, wir dürfen es, da wir mit beiden Seiten der Gleichung das Gleiche gemacht haben – das ist immer „erlaubt". In diesem Fall gilt aber noch mehr: Bei jeder Umformung einer Gleichung nehmen wir an, dass x eine Lösung ist (ansonsten wäre das Gleichheitszeichen ja nicht gerechtfertigt). Da wir als Definitionsmenge (1.2) bzw. (1.3) festgelegt haben, ist also bei jeder Umformung vorausgesetzt, dass $x \neq -1$ und $x \neq 5$ ist. In (2.1) haben wir beide Seiten mit einem Term multipliziert, von dem sichergestellt ist, dass er für alle in Betracht kommenden Werte für x von 0 verschieden ist. Daher handelt es sich um eine **Äquivalenzumformung**! Das bedeutet, dass die neue Gleichung – die zweite Zeile in (2.1) – die gleiche Lösungsmenge besitzt wie die ursprüngliche[3]. Die neue Gleichung kann

[1] Allgemein wird für zwei Mengen A und B definiert: $A\backslash B = \{a \in A \,|\, a \notin B\}$, wobei das Symbol $\notin$ bedeutet „ist nicht Element von".

[2] Das gilt nicht nur für Bruchgleichungen, sondern für alle Gleichungen, bei denen die linke und/oder die rechte Seite für gewisse Werte der Variablen keinen Sinn machen.

[3] Zur Erinnerung: Formen wir eine Gleichung auf eine Weise um, die *keine* Äquivalenzumformung ist, so bekommen wir am Ende einen oder mehrere *Lösungskandidaten* und müssen danach durch die *Probe* entscheiden, ob es sich tatsächlich um (eine oder mehrere) *Lösungen* handelt. Haben wir im Lösungsweg nur Äquivalenzumformungen angewandt, so ist das nicht notwendig (obwohl eine Probe nie schlecht ist, da wir uns ja auch verrechnet haben könnten).

nun mit den bisher bekannten Methoden leicht gelöst werden. Wir können beispielsweise so vorgehen wie im folgenden „Protokoll" gezeigt:

$$\begin{array}{rcll} \frac{2\,x+3}{x+1} & = & \frac{2\,x}{x-5} & \mid\ \cdot\,(x+1)\,(x-5) \\ (2\,x+3)\,(x-5) & = & 2\,x\,(x+1) & \mid\ \text{ausmultiplizieren} \\ 2\,x^2-7\,x-15 & = & 2\,x^2+2\,x & \mid\ -2\,x^2 \\ -7\,x-15 & = & 2\,x & \mid\ -2\,x \\ -9\,x-15 & = & 0 & \mid\ +15 \\ -9\,x & = & 15 & \mid\ \cdot\,(-1) \\ 9\,x & = & -15 & \mid\ :9 \\ x & = & -\frac{15}{9}=-\frac{5}{3}\in D & \end{array} \tag{2.2}$$

In der letzten Zeile wurde vermerkt, dass der erhaltene x-Wert, nämlich $-\frac{5}{3}$, ein Element der Definitionsmenge ist (es gilt ja $-\frac{5}{3}\neq -1$ und $-\frac{5}{3}\neq 5$). Da nur Äquivalenzumformungen durchgeführt wurden, haben wir damit die (einzige) Lösung der Gleichung (1.1) gefunden. Ihre Lösungsmenge ist $L=\{-\frac{5}{3}\}$. Wenn Sie den Lösungsweg noch einmal genau durchgehen, können Sie erkennen, dass wir nach dem dritten Schritt eine lineare Gleichung erhalten haben. (So gesehen war unsere Bruchgleichung nichts anderes als eine als Bruchgleichung „verkleidete" lineare Gleichung!)

Als Warnung zeigen wir, was passieren kann, wenn die Definitionsmenge nicht beachtet wird. Dazu betrachten wir die Gleichung

$$\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}\,. \tag{2.3}$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $x-1$, um die Nenner loszuwerden:

$$\begin{array}{rcll} \frac{x}{x-1} & = & \frac{1}{x-1} & \mid\ \cdot\,(x-1) \\ x & = & 1 & \end{array} \tag{2.4}$$

Also $x=1$. Lösung gefunden? Machen wir die Probe[4]:

$$\text{LHS} = \frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\text{undefiniert} \tag{2.5}$$

$$\text{RHS} = \frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\text{undefiniert} \tag{2.6}$$

Also ist $x=1$ doch keine Lösung! Gleichung (2.3) ist so einfach, dass das Problem sogleich erkannt werden kann: Für $x=1$ sind beide Nenner gleich 0, aber wenn wir die Nenner einfach „wegmultiplizieren", bleibt $x=1$ als „Lösungskandidat" übrig, der aber eben keine Lösung ist. Diese Panne hätten wir uns ersparen können, indem wir die Definitionsmenge als $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (oder $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 1\}$) festgelegt hätten. Unser „Protokoll" hätte dann so ausgesehen:

$$\begin{array}{rcll} \frac{x}{x-1} & = & \frac{1}{x-1} & \mid\ \cdot\,(x-1) \\ x & = & 1\notin D & \end{array} \tag{2.7}$$

[4] LHS („left hand side") steht für die linke Seite der Gleichung, RHS („right hand side") steht für ihre rechte Seite.

Da hier vermerkt ist, dass 1 kein Element von D ist, folgt sogleich, dass 1 keine Lösung ist, d.h. dass (2.3) keine Lösung besitzt. Die Lösungsmenge ist leer: $L = \{\,\}$.

Beim Loswerden der Nenner einer Bruchgleichung kann ähnlich vorgegangen werden wie beim Addieren von Brüchen, die zuerst „auf gleichen Nenner“ gebracht werden. Betrachten wir als Beispiel die Gleichung

$$\frac{3\,x-2}{x+3} = \frac{3\,x^2}{x^2-9}\,. \tag{2.8}$$

Zuerst die Definitionsmenge: Der Nenner auf der linken Seite wird 0, wenn $x = -3$ ist. Der Nenner auf der rechten Seite wird 0, wenn $x^2 - 9 = 0$, d.h. wenn $x = -3$ oder $x = 3$ ist. (Erinnern Sie sich an die quadratischen Gleichungen!) Daher $D = \mathbb{R}\backslash\{-3, 3\}$. Wir könnten nun beide Seiten der Gleichung mit dem Produkt der beiden Nenner, also mit $(x+3)\,(x^2-9)$ multiplizieren. Wenn uns aber auffällt, dass $x^2-9 = (x+3)\,(x-3)$ ist, d.h. dass die Gleichung (2.8) auch in der Form

$$\frac{3\,x-2}{x+3} = \frac{3\,x^2}{(x+3)\,(x-3)} \tag{2.9}$$

angeschrieben werden kann, sehen wir, dass es ausreicht, beide Seiten mit $(x+3)\,(x-3)$ (oder, was damit gleichbedeutend ist, mit x^2-9) zu multiplizieren, um die Nenner loszuwerden. Der gesamte Lösungsweg könnte dann so aussehen:

$$\begin{array}{rcll}
\frac{3\,x-2}{x+3} & = & \frac{3\,x^2}{x^2-9} & \mid \text{ Nenner der rechten Seite faktorisieren} \\
\frac{3\,x-2}{x+3} & = & \frac{3\,x^2}{(x+3)\,(x-3)} & \mid \cdot (x+3)\,(x-3) \\
(3\,x-2)\,(x-3) & = & 3\,x^2 & \mid \text{ linke Seite ausmultiplizieren} \\
3\,x^2 - 11\,x + 6 & = & 3\,x^2 & \mid -3\,x^2 \\
-11\,x + 6 & = & 0 & \mid -6 \\
-11\,x & = & -6 & \mid \cdot(-1) \\
11\,x & = & 6 & \mid :11 \\
x & = & \frac{6}{11} \in D &
\end{array} \tag{2.10}$$

Damit ist die (einzige) Lösung gefunden. Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{6}{11}\}$.

Die bisherigen Beispiele waren der Einfachheit halber so gewählt, dass sich während des Lösungsvorgangs eine lineare Gleichung ergeben hat. Das ist nicht notwendigerweise der Fall. Treten auf beiden Seiten einer Gleichung Brüche von Polynomen auf, so lässt sie sich durch das „Wegmultiplizieren“ der Nenner immer auf eine Gleichung der Form

$$\text{Polynom in } x = 0 \tag{2.11}$$

reduzieren. Insbesondere können auch quadratische Gleichungen auftreten. Hier ein Beispiel:

$$\frac{3\,x-2}{x-2} = \frac{x^2}{x^2-4}\,. \tag{2.12}$$

Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$. Gehen Sie nun das folgende „Protokoll“ genau durch:

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{3\,x-2}{x-2} & = & \frac{x^2}{x^2-4} & \mid \text{ Nenner der rechten Seite faktorisieren} \\
\frac{3\,x-2}{x-2} & = & \frac{x^2}{(x+2)\,(x-2)} & \mid \cdot (x+2)\,(x-2) \\
(3\,x-2)\,(x+2) & = & x^2 & \mid \text{ linke Seite ausmultiplizieren} \\
3\,x^2+4\,x-4 & = & x^2 & \mid -x^2 \\
2\,x^2+4\,x-4 & = & 0 & \mid :2 \\
x^2+2\,x-2 & = & 0 & \mid \text{ kleine Lösungsformel für quadratische} \\
 & & & \mid \text{ Gleichung anwenden} \\
x_{1,2} & = & -1 \pm \sqrt{1+2} = & \\
 & = & -1 \pm \sqrt{3} \in D &
\end{array}
\tag{2.13}
$$

Da sowohl $-1-\sqrt{3}$ also auch $-1+\sqrt{3}$ in der Definitionsmenge liegen (wie in der letzten Zeile des „Protokolls“ vermerkt), sind die beiden Lösungen gefunden. Die Lösungsmenge ist $L = \{-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\}$.

3 Lösungsvarianten

Die Strategie des „Nenner-Wegmultiplizierens“ ist nicht ganz eindeutig, und mit ein bisschen Fingerspitzengefühl kann man sich manchmal die Arbeit verkürzen. Betrachten wir als Beispiel die Gleichung

$$\frac{x^2+2}{x-4} + 3 = 7. \tag{3.1}$$

Hier könnten wir (nachdem die Definitionsmenge als $D = \mathbb{R}\backslash\{4\}$ erkannt worden ist) gleich beide Seiten mit $x-4$ multiplizieren:

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{x^2+2}{x-4} + 3 & = & 7 & \mid \cdot (x-4) \\
x^2+2+3\,(x-4) & = & 7\,(x-4) & \mid \text{ alles ausmultiplizieren} \\
\ldots & = & \ldots &
\end{array}
\tag{3.2}
$$

Klüger (d.h. arbeitssparender) ist es in diesem Fall, so vorzugehen:

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{x^2+2}{x-4} + 3 & = & 7 & \mid -3 \\
\frac{x^2+2}{x-4} & = & 4 & \mid \cdot (x-4) \\
x^2+2 & = & 4\,(x-4) & \mid \text{ rechte Seite ausmultiplizieren} \\
\ldots & = & \ldots &
\end{array}
\tag{3.3}
$$

Erkennen Sie den Unterschied? Beim Lösungsweg (3.3) muss, obwohl er um eine Zeile länger ist, im Unterschied zur ersten Variante (3.2) eine Klammer weniger ausmultipliziert werden!

Haben wir es mit einer Gleichung wie

$$-\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-3} = \frac{21}{x^2-9} \tag{3.4}$$

zu tun (die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R}\backslash\{-3, 3\}$), so bemerken wir zunächst, dass es genügt, beide Seiten mit x^2-9, was ja das Gleiche ist wie $(x+3)\,(x-3)$, zu multiplizieren. Wir könnten das gleich zu Beginn tun oder zuerst die linke Seite auf gleichen Nenner bringen und berechnen. Sehen wir uns die beiden Varianten an: Die erste führt auf

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{1}{x+3}+\tfrac{2}{x-3} &= \tfrac{21}{x^2-9} && \mid \cdot (x^2-9)\\
-(x-3)+2\,(x+3) &= 21 && \mid \text{linke Seite ausmultiplizieren}\\
x+9 &= 21 && \mid -9\\
x &= 12 \in D
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Die zweite Variante führt auf

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{1}{x+3}+\tfrac{2}{x-3} &= \tfrac{21}{x^2-9} && \mid \text{linke Seite auf gleichen Nenner bringen}\\
-\tfrac{x-3}{(x+3)\,(x-3)}+\tfrac{2\,(x+3)}{(x+3)\,(x-3)} &= \tfrac{21}{x^2-9} && \mid \text{links die Addition ausführen}\\
\tfrac{-(x-3)+2\,(x+3)}{(x+3)\,(x-3)} &= \tfrac{21}{x^2-9} && \mid \text{Zähler links ausmultiplizieren}\\
\tfrac{x+9}{(x+3)\,(x-3)} &= \tfrac{21}{x^2-9} && \mid \cdot (x^2-9)\\
x+9 &= 21 && \mid -9\\
x &= 12 \in D
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Unter dem Strich ist die erste Variante (3.5) also etwas kürzer.

In manchen (besonders einfachen) Fällen erübrigt es sich überhaupt, die Nenner loszuwerden, da die Lösungsmenge sofort erkannt werden kann. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$\frac{3\,x}{x+7}=\frac{3\,x}{x+7}+4. \tag{3.7}$$

Sehen Sie ohne jegliche Rechnung, dass die Lösungsmenge leer ist?

Wäre x eine Lösung, so würde die Gleichung aussagen,
dass eine Zahl „gleich sie selbst $+4$ ist“.
Das kann natürlich keine wahre Aussage sein!

Aus all diesen Beispielen lernen wir, dass es von den konkreten, in einer Bruchgleichung vorkommenden Termen abhängt, wie am besten vorgegangen wird. Daher unser Tipp: Sehen Sie sich zunächst die Terme und ihre Struktur an, spielen Sie die Grundzüge der möglichen Lösungsstrategien im Kopf durch, schätzen Sie ab, welche die einfachste sein wird, und diese führen Sie dann durch!

4 Ein schwierigeres Beispiel

Anhand eines schwierigeren Beispiels, das sich aber als machbar herausstellen wird, zeigen wir noch, dass es Fälle von Bruchgleichungen gibt, bei denen eine kombinierte Vorgangsweise, die sich auch anderer Strategien bedient, schneller zum Ziel führt. Die Gleichung, um die es gehen soll, lautet:

$$\left(\frac{x^2-15}{x^2+7}+1\right)^2+\frac{x^2-15}{x^2+7}+1=0. \tag{4.1}$$

Die Definitionsmenge D ist gleich der Grundmenge $\mathbb{R}$, da der einzige auftretende Nenner, x^2+7, nie 0 werden kann, welchen Wert auch immer x annimmt. Sehen Sie sich nun den Term auf der linken Seite genau an! Er ist von der Struktur

$$u^2 + u = 0, \tag{4.2}$$

wenn wir die abgekürzte Schreibweise

$$u = \frac{x^2-15}{x^2+7} + 1 \tag{4.3}$$

verwenden. Also lösen wir zuerst einmal (4.2)! Denken wir uns die linke Seite von (4.2) in der Form $u\,(u+1)$ geschrieben, so ergibt sich, dass es genau zwei Lösungen $u=0$ und $u=-1$ gibt. Ist x also eine Lösung der ursprünglichen Gleichung (4.1), so gilt (4.3) mit $u=0$ oder $u=-1$. Daher gilt für x

$$\text{entweder} \qquad \frac{x^2-15}{x^2+7} + 1 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{x^2-15}{x^2+7} + 1 = -1. \tag{4.4}$$

Wir erhalten damit *zwei* Gleichungen, und *jede* Lösung (zumindest) *einer* dieser beiden Gleichungen ist eine Lösung von (4.1). Die Definitionsmengen der beiden Gleichungen sind nach wie vor ganz $\mathbb{R}$. Wir lösen zuerst die erste:

$$\begin{array}{rcll} \frac{x^2-15}{x^2+7}+1 & = & 0 & \mid\ -1 \\ \frac{x^2-15}{x^2+7} & = & -1 & \mid\ \cdot (x^2+7) \\ x^2-15 & = & -(x^2+7) & \mid\ \text{rechte Seite ausmultiplizieren} \\ x^2-15 & = & -x^2-7 & \mid\ +x^2+7 \\ 2\,x^2-8 & = & 0 & \mid\ :2 \\ x^2-4 & = & 0 & \mid\ \text{quadratische Gleichung, deren Lösungen} \\ & & & \mid\ \text{wir sofort hinschreiben können} \\ x_{1,2} & = & \pm 2 & \end{array} \tag{4.5}$$

Und jetzt die zweite:

$$\begin{array}{rcll} \frac{x^2-15}{x^2+7}+1 & = & -1 & \mid\ -1 \\ \frac{x^2-15}{x^2+7} & = & -2 & \mid\ \cdot (x^2+7) \\ x^2-15 & = & -2\,(x^2+7) & \mid\ \text{rechte Seite ausmultiplizieren} \\ x^2-15 & = & -2\,x^2-14 & \mid\ +2\,x^2+14 \\ 3\,x^2-1 & = & 0 & \mid\ :3 \\ x^2-\frac{1}{3} & = & 0 & \mid\ \text{quadratische Gleichung, deren Lösungen} \\ & & & \mid\ \text{wir sofort hinschreiben können} \\ x_{3,4} & = & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} & \end{array} \tag{4.6}$$

Die Lösungen haben wir jetzt (fortlaufend, da die Symbole x_1 und x_2 bereits mit den zuvor gefundenen Lösungen ± 2 belegt sind) mit x_3 und x_4 nummeriert, und im letzten Schritt wurde der Nenner rational gemacht[5]. Die ursprüngliche Gleichung (4.1) besitzt daher vier Lösungen. Die Lösungsmenge ist $L = \{-2, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 2\}$.

[5] Mit $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$ können wir ja umformen: $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Es lohnt sich also – gerade bei kompliziert aussehenden Gleichungen –, zuerst die Struktur der auftretenden Terme genau anzuschauen! Hätten wir zuerst das Quadrat auf der linken Seite von (4.1) ausmultipliziert und alles auf gleichen Nenner gebracht, so hätten wir wesentlich mehr rechnen müssen, um dann vor der Gleichung vierter Ordnung

$$3\,x^4 - 13\,x^2 + 4 = 0 \tag{4.7}$$

zu stehen. Mit $v = x^2$ hätte sich diese auf die quadratische Gleichung

$$3\,v^2 - 13\,v + 4 = 0 \tag{4.8}$$

mit den Lösungen $v = \frac{1}{3}$ und $v = 4$ reduzieren lassen. Auf diese Weise hätten wir die vier Lösungen $\pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ und $\pm\sqrt{4} = \pm 2$ ebenfalls gefunden, aber eben mit erhöhtem Arbeitsaufwand. (Vollziehen Sie diese längere Lösungsmethode zur Übung selbst im Detail nach!)

5 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$\frac{6\,x-5}{x+1} = \frac{3\,(2\,x+1)}{x-1}$$

Lösung:

Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{1}{10}\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$\frac{x-1}{2\,x+1} = \frac{2\,x+1}{x-3}$$

Lösung:

Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}, 3\}$.
Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{-4-\sqrt{22}}{3}, \frac{-4+\sqrt{22}}{3}\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{2}{x^2 - 2\,x}$$

Lösung:

Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$.
Die Lösungsmenge ist leer: $L = \{\,\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{5\,x+1}{x^2-1}$$

Lösung:

Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$.
Die Lösungsmenge ist $L = \{3\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$\frac{4}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{5\,x+1}{x^2-1}$$

Lösung:

Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$.
Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\}$.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juni 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Überarbeitet im November 2015 und im April 2017 unter Mitwirkung von Harald Stockinger. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.